

# 6. EmsLändische Mathematik Olympiade

(ehemals GraMO)



## Material für die Klassen 5/6

Euch werden nun drei Aufgaben zur schriftlichen Bearbeitung vorgelegt. Jede Aufgabe wird auf einem einzelnen Zettel bearbeitet (also müsst ihr bei drei Aufgaben mindestens drei Zettel benutzen). Achtet auf eine saubere und lesbare Bearbeitung und eine gute Dokumentation (vgl. untenstehende Bewertungsmatrix). Notiert zudem auf jeden Zettel die Schule und die Namen! Für die schriftliche Bearbeitung bekommt ihr 60 Minuten Zeit (ohne Taschenrechner). Die besten drei Mannschaften werden am Ende der Veranstaltung im Rahmen der Siegerehrung geehrt.

## Bewertungsmatrix für die Lösungen jeder Aufgabe:

	Erreichbare Punkte	Erzielte Punkte
<b>Formale Bewertung</b>	<b>20</b>	
Sauberkeit, Lesbarkeit	10	
Strukturierung, Dokumentation	10	
<b>Inhaltliche Bewertung</b>	<b>80</b>	
<b>Summe</b>	<b>100</b>	

**Lösung zu Aufgabe 1:** (Logik und Wahrscheinlichkeitsrechnung; 80 Punkte)

Erwartungshorizont	Punkte																																										
<b>a)</b> Hanna hat 2 – 1 – 5 gewürfelt; das Spiel endet mit dem nächsten Wurf, wenn eine 2, eine 1 oder eine 5 fällt.	<b>5+5+5</b>																																										
<b>b)</b> Ein Beispiel, etwa 5-5 angeben (alle weiteren Lösungen folgen unter c!).	<b>5</b>																																										
<b>c)</b> Insgesamt gibt es 25 Spielverläufe, die man durch verschiedene Überlegungen finden kann.	<b>24x1</b>																																										
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tbody> <tr> <td style="width: 16.6%;">5-5</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>2-4-4</td> <td>4-2-4</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>3-4-3</td> <td>4-3-3</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>2-6-2</td> <td>6-2-2</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>1-2-6-1</td> <td>1-6-2-1</td> <td>2-1-6-1</td> <td>2-6-1-1</td> <td>6-1-2-1</td> <td>6-2-1-1</td> </tr> <tr> <td>1-2-5-2</td> <td>1-5-2-2</td> <td>2-1-5-2</td> <td>2-5-1-2</td> <td>5-1-2-2</td> <td>5-2-1-2</td> </tr> <tr> <td>1-3-5-1</td> <td>1-5-3-1</td> <td>3-1-5-1</td> <td>3-5-1-1</td> <td>5-1-3-1</td> <td>5-3-1-1</td> </tr> </tbody> </table>	5-5						2-4-4	4-2-4					3-4-3	4-3-3					2-6-2	6-2-2					1-2-6-1	1-6-2-1	2-1-6-1	2-6-1-1	6-1-2-1	6-2-1-1	1-2-5-2	1-5-2-2	2-1-5-2	2-5-1-2	5-1-2-2	5-2-1-2	1-3-5-1	1-5-3-1	3-1-5-1	3-5-1-1	5-1-3-1	5-3-1-1	
5-5																																											
2-4-4	4-2-4																																										
3-4-3	4-3-3																																										
2-6-2	6-2-2																																										
1-2-6-1	1-6-2-1	2-1-6-1	2-6-1-1	6-1-2-1	6-2-1-1																																						
1-2-5-2	1-5-2-2	2-1-5-2	2-5-1-2	5-1-2-2	5-2-1-2																																						
1-3-5-1	1-5-3-1	3-1-5-1	3-5-1-1	5-1-3-1	5-3-1-1																																						
Hinweis, dass es keine weiteren Lösungen gibt.	<b>1</b>																																										
<b>d)</b> Kleinster Wert: 2 [ 1-1, weniger geht offensichtlich nicht!] Größter Wert: 27 [Permutation von 1-2-3-4-5-6 und Endziffer 6, es kommen alle möglichen Ziffern vor und zusätzlich der größte Wert    doppelt.]	<b>10</b> <b>10</b> <b>Ohne Begr.!</b>																																										
<b>e)</b> Systematisches Ausprobieren: Schon 3 geht nicht..... [fertig!] 2-2, 2-1-1 bzw. 1-2-1 sind die Kombinationen, die nach 1-1 den kleinsten Wert (nämlich 4) liefern!	<b>5</b> <b>Begr.:</b> <b>10</b>																																										
<b>Summe</b>	<b>80</b>																																										
<b>Sauberkeit, Lesbarkeit</b>	<b>10</b>																																										
<b>Strukturierung, Dokumentation</b>	<b>10</b>																																										

## Lösung zu Aufgabe 2:

Erwartungshorizont	Punkte
a) Zeichnung ist klar	<b>10</b>
Es gibt vier Sorten Quadrate.	<b>10</b>
16 1x1-, 9 2x2-, 4 3x3- und 1 4x4-Quadrat(e)	<b>10</b>
Insgesamt sind es $(1+4+9+16=)$ 30 Quadrate.	<b>10</b>
b) Es gibt fünf Sorten Quadrate: 25 1x1-, 16 2x2-, 9 3x3-, 4 4x4- und 1 5x5-Quadrat(e).	<b>10</b>
Insgesamt sind es $(1+4+9+16+25 =)$ 55 Quadrate.	<b>10</b>
c)	
Es sind 55 [(s.o.) + 36 + 49 =] 140 Quadrate.	<b>Idee 10</b>
	<b>Rechnung 10</b>
Summe	<b>80</b>
Sauberkeit, Lesbarkeit	<b>10</b>
Strukturierung, Dokumentation	<b>10</b>

### Lösung zu Aufgabe 3:

Erwartungshorizont	Punkte
a) Drei Beispiel, z.B.: $7+8+9=24$ $24:3 =8$ $12+13+14=39$ $39:3=13$ $13+14+15=42$ $42:3=14$	<b>5</b> <b>5</b> <b>5</b>
<p>Mögliche Begründungen:</p> <p>Von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer eine durch drei teilbar, eine lässt den Rest 1 und eine lässt den Rest 2 bei Division durch 3. Die beiden Reste ergeben zusammen 3. Die Summe ist also stets durch 3 teilbar.</p> <p>Oder:</p> <p>Die Variable <math>n</math> gibt die kleinste der aufeinanderfolgenden Zahlen an. Dann ist die Summe <math>n+(n+1)+(n+2)=3 \cdot n+3</math> immer durch 3 teilbar, denn <math>3 \cdot n</math> ist durch 3 teilbar und der Summand 3 natürlich auch.</p> <p>Oder:</p> <p>Induktiv: Die Summe der ersten drei natürlichen Zahlen beträgt <math>(1+2+3=)</math> 6 und ist durch 3 teilbar. <math>[6:3=2]</math>.</p> <p>auch Die zweitkleinste Summe <math>(2+3+4)</math> ist genau um drei größer, da jede Zahl genau um 1 größer ist als vorher und daher durch drei teilbar.</p> <p>So lässt sich jede weitere Dreierfolge auf die erste zurückführen.</p>	<b>Begr.</b> <b>15</b>           <b>(z. B.:</b> <b>5</b> <b>+</b> <b>5</b> <b>+</b> <b>5)</b>
b) Angabe eines Gegenbeispiels reicht, z.B.: $1+2+3+4=10$ $10:4=2R2$	<b>20</b>
c) Test: $1+2+3+4+5=15$ $15:5=3$ [passt]  PLUS passende Argumentation vgl. a) Summe wird immer um 5 größer	<b>10+10</b> <b>Arg.: 10</b>
<p>Oder:</p> <p>In der Summe <math>n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)=5 \cdot n+10</math> ist <math>5 \cdot n</math> durch 5 teilbar, und auch 10 ist durch 5 teilbar. Die Summe von fünf aufeinanderfolgenden Zahlen stets durch 5 teilbar.</p>	
Summe	<b>80</b>
Sauberkeit, Lesbarkeit	<b>10</b>
Strukturierung, Dokumentation	<b>10</b>