6. EmsLändische Mathematik Olympiade EL–MO 2017

(ehemals GraMO)

Material für die Klassen 7-10

Euch werden nun vier Aufgaben zur schriftlichen Bearbeitung vorgelegt. Jede Aufgabe wird auf einem einzelnen Zettel bearbeitet (also müsst ihr bei vier Aufgaben mindestens vier Zettel benutzen). Achtet auf eine saubere und lesbare Bearbeitung und eine gute Dokumentation (vgl. untenstehende Bewertungsmatrix). Notiert zudem auf jeden Zettel die Schule und die Namen! Für die schriftliche Bearbeitung bekommt ihr **90 Minuten Zeit** (ohne Taschenrechner). Die drei besten Mannschaften aus diesem schriftlichen Wettbewerbsteil kommen in die Endausscheidung. Die Bewertungskriterien findest du nachfolgend.

Bewertungsmatrix für die Lösungen jeder Aufgabe:

	Erreichbare Punkte	Erzielte Punkte
Formale Bewertung	**20**	
Sauberkeit, Lesbarkeit Strukturierung, Dokumentation	10 10	
Inhaltliche Bewertung	**80**	
Summe	**100**	

Aufgaben

Aufgabe 1: (Algebra; Mathema September 2007; 80 Punkte)

Mathematika gibt Jan neun gleiche Münzen und fordert ihn auf, diese für sie unsichtbar in seine linke und rechte Hand zu verteilen. “Ich werde dir sagen, wie viele Münzen du in jeder Hand versteckt hältst! Multipliziere die Anzahl der Münzen in deiner linken Hand mit 5 und die Anzahl der Münzen in deiner rechten Hand mit 4. Dann addiere die beiden Produkte und nenne mir das Ergebnis!“ Jan rechnet und sagt: “ 42.“ Mathematika kennt die Zauberzahl für diesen Trick – sie lautet 36. Mathematika rechnet schnell 42 – 36 = 6 und sagt: “Dann hast du in der linken Hand 6 und in der rechten Hand 3 Münzen!“ Jan ist überrascht, es stimmt!

a) Probiere diesen Zaubertrick für zwei Beispiele aus! Wie kommt Mathematika auf die Zauberzahl 36?

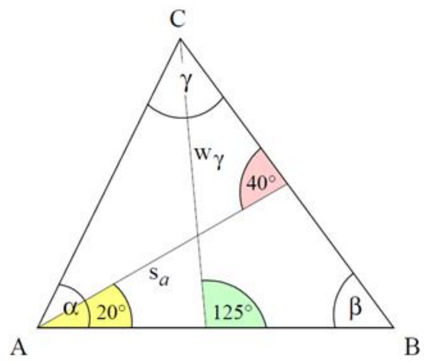
b) Bestimme die Zauberzahl bei insgesamt 10 Münzen und den Multiplikatoren 8 (links) und 7 (rechts)?

c) Warum lässt sich der Trick für beliebige Anzahlen von Münzen durchführen, wenn die Multiplikatoren wie in Teil b) 8 (links) und 7 (rechts) sind?

d) Auch wenn die Differenz der Multiplikatoren von 1 abweicht, funktioniert der Trick in bestimmten Fällen durch geeignete Anpassungen. Erläutere dies für den Fall von 20 Münzen.

Aufgabe 2: (Geometrie; Mathema Februar 2014; 80 Punkte)

Im Dreieck ABC ist w_γ die Winkelhalbierende des Winkels γ und s_a die Seitenhalbierende zur Seite a. Die Skizze ist nicht maßstäblich (Anmerkung: die Winkelgrößen können nicht gemessen werden)! Bestimme die Größe der Innenwinkel $\alpha, \beta\ und\ \gamma$. Gib alle Hilfswinkel an und begründe jeden Schritt.



Aufgabe 3: (Logik; Mathema September 2008; 80 Punkte)

Gesucht ist folgende Lieblingszahl (Hinweis: Es gibt genau eine solche Zahl).

Mathematikus hat eine Lieblingszahl, für die gilt:

(1) Die Zahl besteht aus genau allen neun Ziffern von 1 bis 9.

(2) Die letzte Ziffer ist doppelt so groß wie die erste und um 2 größer als die mittlere Ziffer.

(3) Die dritte Ziffer ist um eins größer als die achte.

(4) Die fünfte Ziffer multipliziert mit der sechsten ist genauso groß wie die siebte multipliziert der achten.

(5) Die zweite Ziffer ist größer als die vierte.

Dokumentiere ausführlich, wie du auf die Zahl gekommen bist!

Aufgabe 4: (Zahlentheorie; Januar 2007; 80 Punkte)

Unter 4! (sprich: „vier Fakultät“) versteht man das folgende Produkt der natürlichen Zahlen: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. 6! berechnet man durch $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

a) Berechne 7! und gib an, was n! bedeutet!

Es geht nun um die Anzahl der Nullen, die bei den einzelnen Fakultäten von n auftreten. 5! = 120 endet zum Beispiel mit einer Null. Martin behauptet: „Das ist doch logisch, dass 5! zum ersten Mal eine Endnull aufweist.

$$5! = \mathbf{5} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \mathbf{2} \cdot 1$$

Man braucht dafür ja schließlich eine 5 und eine gerade Zahl, damit beim Multiplizieren ein Vielfaches von 10 herauskommt.“

b) Welche Fakultäten haben zwei, drei, vier Endnullen? Bestimme alle!

c) Wie viele Endnullen haben 50! und 126! ?

d) Erläutere, warum es keine Fakultät mit fünf Endnullen gibt!