

## Erwartungshorizont zu den Aufgaben 7-10

### Lösung zu Aufgabe 1:

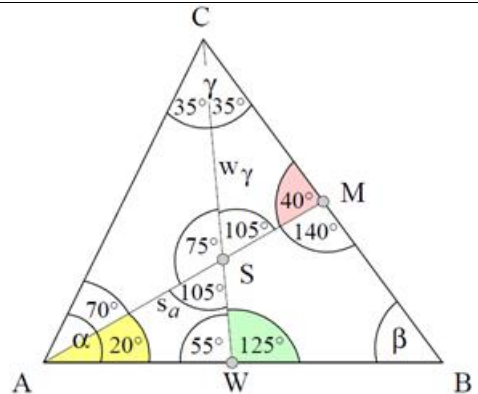
Erwartungshorizont	Punkte
<p><b>(a) Mögliche Beispiele:</b></p> <p><b>1. Beispiel:</b></p> <p>In der linken Hand sind 3, in der rechten Hand 6 Münzen: Dann ist:</p> $3 \cdot 5 + 6 \cdot 4 = 15 + 24 = 39$ $39 - 36 = 3$ <p>Damit sind drei Münzen in der linken Hand und sechs Münzen in der rechten Hand.</p>	<p>2</p> <p>4</p> <p>4</p>
<p><b>2. Beispiel:</b></p> <p>In der linken Hand sind 2, in der rechten Hand 7 Münzen: Dann ist:</p> $2 \cdot 5 + 7 \cdot 4 = 10 + 28 = 38$ $38 - 36 = 2$ <p>Damit sind zwei Münzen in der linken Hand und sieben Münzen in der rechten Hand.</p>	<p>1</p> <p>2</p> <p>2</p>
<p><b>Begründung für die Zauberzahl 36:</b></p> <p>Es sei L die Anzahl der Münzen in der linken Hand, R die Anzahl der Münzen in der rechten Hand. Dann ist:</p> $L + R = 9$ <p>Die von Jan genannte Zahl A ist dann</p> $A = 5L + 4R = 5L + 4(9 - L) = 5L + 36 - 4L = L + 36$ <p>Die Zauberzahl ist damit 36.</p>	<p>5</p> <p>5</p>

<p><b>(b)</b> Man kann hier durch Probieren auf die Lösung stoßen oder aber auch durch eine geeignete Rechnung (siehe nachfolgend):  <math>L + R = 10</math></p> <p>Die genannte Zahl A ist dann</p> $A = 8L + 7(10 - L) = 8L + 70 - 7L = L + 70$ <p>Die Zauberzahl ist 70. Auch möglich ist die Rechnung: <math>7 \cdot 10 = 70</math>.</p>	<p style="text-align: right;"><b>Idee: 5</b></p> <p style="text-align: right;"><b>Nachweis: 9</b></p> <p style="text-align: right;"><b>Ergebnis: 1</b></p>
<p><b>(c)</b> Der Trick funktioniert für beliebige Anzahlen von Münzen, weil man eine allgemeine Gleichung aufstellen kann:</p> <p>Es sei m die Anzahl der Münzen und 8 der Multiplikator für L und 7 der Multiplikator für R, so ergibt sich:</p> $A = 8 \cdot L + 7 \cdot (m - L) = 8 \cdot L + 7 \cdot m - 7 \cdot L = L + 7 \cdot m$ <p>Damit ist die Zauberzahl ein Vielfaches von 7 und hängt von der Anzahl der Münzen m ab.</p>	<p style="text-align: right;"><b>Idee: 5</b></p> <p style="text-align: right;"><b>Rechnung: 5</b></p> <p style="text-align: right;"><b>Ergebnis: 5</b></p>
<p><b>(d) 1. Lösung (formaler):</b></p> <p>Für 20 Münzen erhält man allgemein:</p> <p>Es sei 20 die Anzahl der Münzen und x der Multiplikator für L und y der Multiplikator für R, so ergibt sich:</p> $A = x \cdot L + y \cdot (20 - L) = x \cdot L + 20 \cdot y - y \cdot L = (x - y) \cdot L + 20 \cdot y$ <p>Man stellt nun um nach L:</p> $A = (x - y) \cdot L + 20 \cdot y$ $A - 20 \cdot y = (x - y) \cdot L \mid : (x - y)$ $L = \frac{A - 20 \cdot y}{x - y}$ <p>Es sind nun zwei Aspekte erkennbar:</p> <p>(1) Notwendig ist <math>x \neq y</math>, ansonsten funktioniert der Trick NICHT!</p> <p>(2) Es ist sinnvoll, dass man <math>x - y = 1</math> wählt, damit man L direkt</p>	<p style="text-align: right;"><b>10</b></p> <p style="text-align: right;"><b>5</b></p> <p style="text-align: right;"><b>5</b></p>

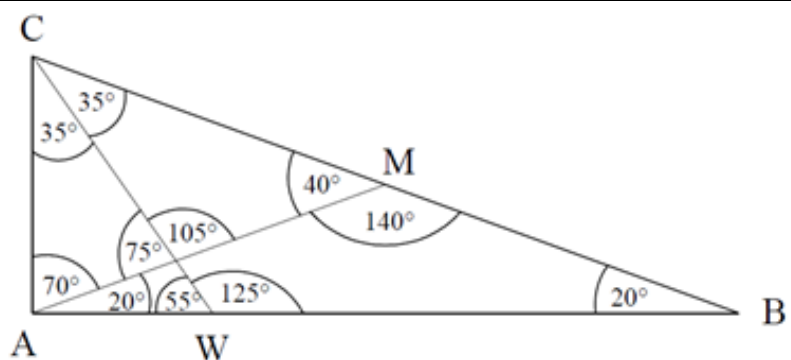
erhält. Ansonsten gibt es keine direkte Subtraktionsrechnung, um auf die Anzahlen in den zwei Händen direkt zu kommen. Man muss ansonsten anschließend noch dividieren.	<b>5</b>
<p>(d) 2. Lösung (Lösungsvariante):</p> <p><b>1. Fall:</b> (Multiplikatoren sind größer als 1)</p> <p>Wir wählen für die Multiplikatoren 8 und 5 und rechnen los (die Wahl der Multiplikatoren ist beliebig).</p> <p>Es sei 20 die Anzahl der Münzen und 8 der Multiplikator für L und 5 der Multiplikator für R, so ergibt sich:</p> $A = 8 \cdot L + 5 \cdot (20 - L) = 8 \cdot L + 20 \cdot 5 - 5 \cdot L = 3 \cdot L + 100$ <p>Umstellen nach A L liefert:</p> $L = \frac{A - 100}{3}$ <p>Damit muss man am Ende die gesagte Zahl minus 100 rechnen und dann durch 3 teilen. Der Trick funktioniert damit auch durch geeignete Anpassungen für Multiplikatoren, deren Differenz größer als 1 ist.</p> <p><b>2. Fall:</b> (Multiplikatoren sind gleich)</p> <p>Sind die Multiplikatoren gleich, geht der Trick NICHT. Denn:</p> <p>Wir wählen die Multiplikatoren 5 und 5 und erhalten:</p> $A = 5 \cdot L + 5 \cdot (20 - L) = 5L + 100 - 5L = 100$ <p>Man erhält immer 100 und kann dadurch keine Aussage über die Anzahl der Münzen treffen.</p>	<p><b>10</b></p> <p><b>5</b></p> <p><b>5</b></p> <p><b>5</b></p>
Summe	<b>80</b>
Sauberkeit, Lesbarkeit	<b>10</b>
Strukturierung, Dokumentation	<b>10</b>

**Lösung zu Aufgabe 2:**

Erwartungshorizont	Punkte
<p>Es gibt hier sehr viele verschiedene Lösungswege. Einer wird hier vorgestellt. Die anderen sind in Anlehnung an diesen Vorschlag ähnlich zu bewerten. Die einzelnen Schritte sind wie nachfolgend zu begründen. Ansonsten gibt es entsprechende Abzüge!</p>	
<p>Der Nebenwinkel vom 40°-Winkel ist 140°.</p> <p>Damit lässt sich durch das Dreieck ABM der Winkel <math>\beta</math> berechnen. Es gilt:  <math>\beta = 180^\circ - 140^\circ - 20^\circ = 20^\circ</math></p> <p>Der Nebenwinkel von 125° ist 55°.</p> <p>Dadurch erhält man mit dem Schnittpunkt S im Dreieck und dem Dreieck AWS den Winkel 105° (<math>180^\circ - 55^\circ - 20^\circ</math>).</p> <p>Mit Hilfe des Dreiecks SMC ergibt sich als Scheitelwinkel von 105° dann der halbe Winkel von <math>\gamma</math>.</p> $\frac{1}{2}\gamma = 180^\circ - 105^\circ - 40^\circ = 35^\circ.$ <p>Damit ist <math>\gamma = 70^\circ</math>.</p> <p>Abschließend erhält man erneut durch die Winkelsumme im Dreieck durch das Dreieck ABC den Winkel <math>\alpha = 180^\circ - 70^\circ - 20 = 90^\circ</math>.</p>	<p style="text-align: right;"><b>10</b></p> <p style="text-align: right;"><b>10</b></p> <p style="text-align: right;"><b>10</b></p> <p style="text-align: right;"><b>10</b></p> <p style="text-align: right;"><b>10</b></p> <p style="text-align: right;"><b>10</b></p> <p style="text-align: right;"><b>10</b></p>
<p>Summe</p> <p>Sauberkeit, Lesbarkeit</p> <p>Strukturierung, Dokumentation</p>	<p style="text-align: right;"><b>80</b></p> <p style="text-align: right;"><b>10</b></p> <p style="text-align: right;"><b>10</b></p>



Bewusst wurde in der Aufgabenstellung keine maßstäbliche Zeichnung gegeben, weil der rechte Winkel sich verraten hätte.



### Lösung zu Aufgabe 3:

Erwartungshorizont	Punkte																											
<p>Es gibt hier sehr viele verschiedene Lösungswege. Einer wird hier vorgestellt. Die anderen sind in Anlehnung an diesen Vorschlag ähnlich zu bewerten. Die einzelnen Schritte sind wie nachfolgend zu begründen. Ansonsten gibt es entsprechende Abzüge!</p>																												
<p>Hier ist ein systematisches Probieren und Ausschließen sinnvoll: Es sei <math>x</math> die erste Ziffer, <math>y</math> die mittlere Ziffer und <math>z</math> die achte Ziffer. Die Bedingungen (4) und (5) werden zunächst vernachlässigt. Dann ist:</p> <div style="text-align: center; margin: 10px 0;"> <table style="margin: auto; border: none;"> <tr> <td style="padding: 0 10px;"><math>x</math></td> <td></td> <td style="padding: 0 10px;"><math>z+1</math></td> <td></td> <td style="padding: 0 10px;"><math>y</math></td> <td></td> <td style="padding: 0 10px;"><math>z</math></td> <td style="padding: 0 10px;"><math>y+2</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 10px;"><input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/></td> <td style="padding: 0 10px;"><input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/></td> <td style="padding: 0 10px;"><input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/></td> <td style="padding: 0 10px;"><input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/></td> <td style="padding: 0 10px;"><input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/></td> <td style="padding: 0 10px;"><input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/></td> <td style="padding: 0 10px;"><input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/></td> <td style="padding: 0 10px;"><input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/></td> <td style="padding: 0 10px;"><input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/></td> </tr> </table> </div> <p>Da die letzte Zahl doppelt so groß ist wie die erste, kann die erste Zahl nur die Ziffern 1-4 annehmen.</p> <p>1 ist ausgeschlossen, da die letzte Ziffer um zwei größer ist als die mittlere.</p> <p>2 ist auch auszuschließen, da die mittlere Ziffer dann auch eine 2 sein müsste.</p> <p>Es bleiben also nur die 3 und 4 als Zahlen für die erste Ziffer.</p> <p>Es wird die Zahl 3 ausprobiert als Startzahl. Hier kann die Zahl 4 ausgeschlossen werden durch geeignete Betrachtungen. Dies ist aber nicht zwingend erforderlich, da die Aufgabenstellung suggeriert, dass es nur eine solche Zahl gibt. Rechnet man (wie hier mit der 3) weiter und kommt zu einer Lösung, ist das vollkommen in Ordnung.</p> <p>Wir rechnen mit der 3 als erste Ziffer weiter:</p> <div style="text-align: center; margin: 10px 0;"> <table style="margin: auto; border: none;"> <tr> <td style="padding: 0 10px;"><input style="width: 20px; height: 20px;" type="text" value="3"/></td> <td style="padding: 0 10px;"><input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/></td> <td style="padding: 0 10px;"><input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/></td> <td style="padding: 0 10px;"><input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/></td> <td style="padding: 0 10px;"><input style="width: 20px; height: 20px;" type="text" value="4"/></td> <td style="padding: 0 10px;"><input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/></td> <td style="padding: 0 10px;"><input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/></td> <td style="padding: 0 10px;"><input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/></td> <td style="padding: 0 10px;"><input style="width: 20px; height: 20px;" type="text" value="6"/></td> </tr> </table> </div> <p>Die fünfte mal die sechste Ziffer soll so groß sein, wie die siebte mal die achte. Es bleiben die Zahlen 1, 2, 5, 7, 8, 9. Die Produkte von 4 mit diesen Zahlen ergeben: 4, 8, 20, 28, 32, 36.</p> <p>Die Produkte 4, 20, 28, 32 und 36 sind mit den übrigen Zahlen nicht zu erreichen. Nur die 8 ließe sich durch <math>1 \cdot 8 = 8</math> erzielen. Man würde erhalten:</p>	$x$		$z+1$		$y$		$z$	$y+2$		<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text" value="3"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text" value="4"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text" value="6"/>	<p>10</p> <p>10</p> <p>10</p>
$x$		$z+1$		$y$		$z$	$y+2$																					
<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/>																				
<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text" value="3"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text" value="4"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 20px; height: 20px;" type="text" value="6"/>																				

3				4	2	1	8	6
---	--	--	--	---	---	---	---	---

Die Reihenfolge 1, 8 ist durch die 3. Aussage bestimmt, da die dritte Ziffer um eins größer sein muss als die achte. Die 2 (1+1) ist schon durch die 6. Ziffer besetzt.

Es würde sich unmittelbar die dritte Ziffer ergeben:

3		9		4	2	1	8	6
---	--	---	--	---	---	---	---	---

10

Die zweite Ziffer ist größer als die vierte liefert:

3	7	9	5	4	2	1	8	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---

10

Damit sind alle Bedingungen erfüllt. Letztlich suggeriert die Aufgabenstellung, dass es nur eine Lieblingszahl gibt. Ein Ausschluss der anderen Lösung ist nicht zwingend gefordert.

**Sollte jemand die Zahl nur angeben, ohne jegliche Herleitung, erhält er 40 von 80 Punkten. Die Punkte für Sauberkeit, Lesbarkeit können gesondert vergeben werden.**

10

10

Summe

80

Sauberkeit, Lesbarkeit

10

Strukturierung, Dokumentation

10

### Lösung zu Aufgabe 4:

Erwartungshorizont	Punkte
<p>(a) Es gilt:  <math>7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040</math></p> <p><math>n!</math> bedeutet also, dass man die Zahlen bis einschließlich <math>n</math> miteinander multipliziert. Es gilt: <math>n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1</math></p>	<p><b>10</b></p> <p><b>10</b></p>
<p>(b) Die kleinsten Fakultäten mit zwei Endnullen hat <math>10!</math>, mit drei Endnullen <math>15!</math>, vier Endnullen <math>20!</math>.</p> <p>Genannt werden müssen aber auch:  Zwei Endnullen: <math>11!</math>, <math>12!</math>, <math>13!</math>, <math>14!</math>  Drei Endnullen: <math>16!</math>, <math>17!</math>, <math>18!</math>, <math>19!</math>  Vier Endnullen: <math>21!</math>, <math>22!</math>, <math>23!</math>, <math>24!</math></p>	<p><b>15</b></p> <p><b>5</b></p>
<p>(c) Man denke sich das Produkt <math>n!</math> in Primfaktoren. Die Anzahl, mit der der Faktor 5 auftritt, bestimmt die Anzahl der Endnullen. Denn neben der Fünf sind immer mehr gerade Zahlen mit 2 als Primfaktor vorhanden als Fünfen, die dafür sorgen, dass die Fünf mit einer geraden Zahl multipliziert für eine Endnull mehr sorgt.  <math>25 = 5 \cdot 5</math> und <math>50 = 5 \cdot 5 \cdot 2</math>  <math>50!</math> hat somit 12 Endnullen.</p> <p>In der 126 stecken zusätzlich 12 weitere Faktoren mit 5 als Primfaktor (<math>55, 60, 65, 70, 80, 85, 90, 95, 105, 110, 115, 120</math>), vier Faktoren mit 5 als doppeltem Primfaktor (<math>75, 100</math>) sowie drei Fünfen in der 125.  <math>125 = 5 \cdot 5 \cdot 5</math>  <math>126!</math> hat also 31 Endnullen.</p>	<p><b>10</b></p> <p><b>10</b></p>
<p>(d) Eine Fakultät mit fünf Endnullen ist nicht möglich. Dies ist z. B. zu erläutern durch folgende Argumentation:  Vier Endnullen haben nach Teil b) <math>20!</math>, <math>21!</math>, <math>22!</math>, <math>23!</math> und <math>24!</math>. Der nächste Kandidat für fünf Endnullen wäre <math>25!</math>.</p> <p><math>25!</math> hat aber sechs Endnullen, da sich <math>25 = 5 \cdot 5</math> in zwei Fünfen zerlegen lässt, die jeweils bei der Multiplikation mit zwei geraden Zahlen (z. B. <math>22</math> und <math>24</math>) zwei weitere Endnullen erzeugen.</p> <p>Größere Zahlen sind ausgeschlossen, da die Anzahl der Endnullen bei einer weiteren Multiplikation mit einer größeren Zahl erhalten bleibt bzw. ansteigt.</p>	<p><b>10</b></p> <p><b>10</b></p> <p><b>5</b></p>
<p>Summe</p> <p>Sauberkeit, Lesbarkeit</p> <p>Strukturierung, Dokumentation</p>	<p><b>80</b></p> <p><b>10</b></p> <p><b>10</b></p>

