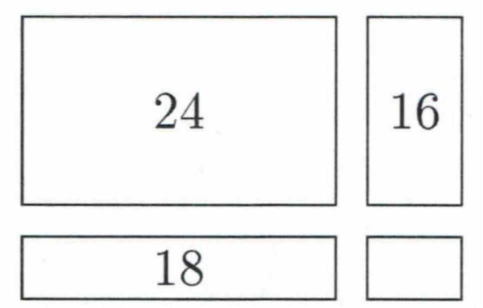
Lösung zum Problem des Monats im März

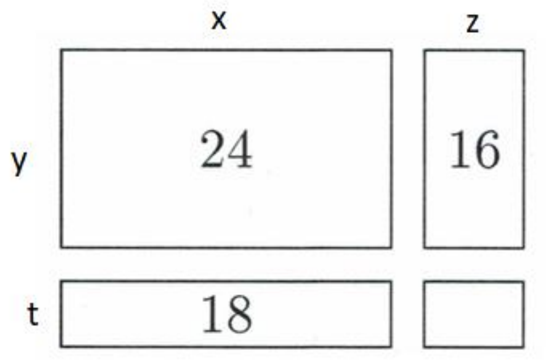
Ein rechteckiges Blatt wird durch zwei Schnitte in vier Rechtecke zerlegt (siehe nebenstehende, nicht maßstabsgerechte Abbildung). Die Seitenlängen der einzelnen Rechtecke seien jeweils ganzzahlig.

(a) Die eingetragenen Zahlen geben jeweils den Umfang der Rechtecke an. Ermittele alle Möglichkeiten für den Umfang des vierten Rechtecks.

(b) Die eingetragenen Zahlen geben jetzt jeweils den Flächeninhalt der Rechtecke an. Ermittle alle Möglichkeiten für den Flächeninhalt des vierten Rechtecks.



(a) Wir bezeichnen die Längen der Seiten mit verschiedenen Buchstaben und formulieren **Gleichungen** (das ist nicht zwingend nötig, aber durchaus der Übersichtlichkeit halber sinnvoll).



Damit folgt:

$2 \cdot x + 2 \cdot y = 24$

$2 \cdot t + 2 \cdot x = 18$

$2 \cdot y + 2 \cdot z = 16$

Unklar ist wie groß $2 \cdot t + 2 \cdot z$ sein kann.

Die drei Gleichungen teilen wir jeweils durch 2:

$x + y = 12 \rightarrow y = 12 - x$

$t + x = 9 \rightarrow t = 9 - x$

$y + z = 8 \rightarrow z = 8 - y$

Wir setzen nun alle möglichen Zahlen **systematisch** ein:

Beispielhaft die Rechnungen für x=1:

$y = 12 - 1 = 11,$

$t = 9 - 1 = 8$

$z = 8 - 11 = -3\ Widerspruch\ (Längen\ können\ nicht\ negativ\ sein)$

	x	y	z	t	$u = 2z + 2t$
x=1	1	11	8	**-3**	---
x=2	2	10	7	**-2**	---
x=3	3	9	6	**-1**	---
x=4	4	8	5	**0**	---
x=5	5	7	4	**1**	10 $(2 \cdot 4 + 2 \cdot 1)$
x=6	6	6	3	**2**	10 $(2 \cdot 3 + 2 \cdot 2)$
x=7	7	5	2	**3**	10 $(2 \cdot 2 + 2 \cdot 3)$
x=8	8	4	1	**4**	10 $(2 \cdot 1 + 2 \cdot 4)$
x=9	9	3	**0**	5	---
x=10	10	2	**-1**	6	---

Man erkennt, dass es für größere x aufgrund der negativen Ergebnisse für z keine weiteren Lösungen geben kann. Damit erhält man als Umfang immer 10. Dies ist möglich für z=4 und t=1, für z=3 und t=2, für z=2 und t=3 sowie für z=1 und t=4. Als korrekte Antwort (mit passender Begründung und Dokumentation) ist u=10 als einziger Umfang korrekt.

Alternative Lösung:

Durch Umstellen der oben aufgestellten Gleichungen erhält man (wie oben):

$x + y = 12 \rightarrow y = 12 - x$

$t + x = 9 \rightarrow t = 9 - x$

$y + z = 8 \rightarrow z = 8 - y$

Einsetzen von y in z liefert:

$z = 8 - (12 - x) = 8 - 12 + x = -4 + x = x - 4$

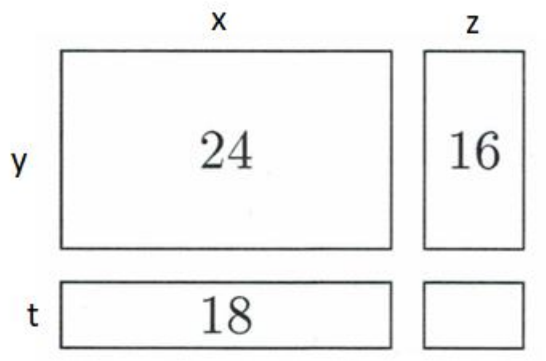
Einsetzen von t und z in den Umfang $u = 2t + 2z$

$u = 2 \cdot t + 2 \cdot z = 2 \cdot (9 - x) + 2 \cdot (x - 4) = 18 - 2x + 2x - 8 = 10$

Damit sieht man auch, dass der Umfang immer 10 betragen muss.

(b) Ähnlich wie in (a) geht man in (b) vor, wenngleich hier nicht der Umfang, sondern der Flächeninhalt im Blickpunkt steht. Genutzt werden kann das **Transformationsprinzip**.

Wir bezeichnen die Längen der Seiten wieder mit verschiedenen Buchstaben und formulieren Gleichungen:



Damit folgt:

$x \cdot y = 24$

$t \cdot x = 18$

$y \cdot z = 16$

Unklar ist wie groß $t \cdot z$ sein kann.

Durch Umstellen (teilen durch x, x und y erhält man Aussagen über y, t und z):

$x \cdot y = 24 \rightarrow y = \frac{24}{x}$

$t \cdot x = 18 \rightarrow t = \frac{18}{x}$

$y \cdot z = 16 \rightarrow z = \frac{16}{y}$

Und auch nun hilft wieder die Übersichtlichkeit einer **Tabelle**:

Als Hinweis: Laut Aufgabenstellung sind nur ganzzahlige Werte für die Seitenlängen zulässig. Deshalb fallen einige Lösungen raus! Aus der Gleichung für y folgt direkt, dass nur Teiler von 24 in Frage kommen können. Dies sind 1, 2, 3, 4, 6, 12, 24. Nur diese möglichen x-Werte werden anhand einer Tabelle untersucht:

	x	y	z	t	$A = z \cdot t$
x=1	1	$\frac{24}{1} = 24$	$\frac{18}{1} = 18$	$\mathbf{\frac{16}{24} = \frac{2}{3}}$	--- (A=12, aber Werte nicht zulässig)
x=2	2	$\frac{24}{2} = 12$	$\frac{18}{2} = 9$	$\mathbf{\frac{16}{12} = 1\frac{1}{3}}$	--- (A=12, aber Werte nicht zulässig)
x=3	**3**	$\mathbf{\frac{24}{3} = 8}$	$\mathbf{\frac{18}{3} = 6}$	$\mathbf{\frac{16}{8} = 2}$	$A = 6 \cdot 2 = 12$
x=4	4	$\frac{24}{4} = 6$	$\mathbf{\frac{18}{4} = 4.5}$	$\mathbf{\frac{16}{6} = 2\frac{2}{3}}$	--- (A=12, aber Werte nicht zulässig)
x=6	6	$\mathbf{\frac{24}{6} = 4}$	$\mathbf{\frac{18}{6} = 3}$	$\mathbf{\frac{16}{4} = 4}$	$A = 3 \cdot 4 = 12$
x=12	12	$\frac{24}{12} = 2$	$\mathbf{\frac{18}{12} = 1\frac{1}{2}}$	$\frac{16}{2} = 8$	--- (A=12, aber Werte nicht zulässig)
x=24	24	$\frac{24}{24} = 1$	$\mathbf{\frac{18}{24} = \frac{3}{4}}$	$\frac{16}{1} = 16$	--- (A=12, aber Werte nicht zulässig)

Hinweis: Man hätte auch erkennen können, dass mögliche Lösungen für x zwingend Teiler von 24 und 18 sein müssen. Dadurch hätte man x=4, x=12 und x=24 direkt ausschließen können.

Der Flächeninhalt kann damit nur A=12 sein. Dies ist in zwei Fällen möglich. x=3, y=8, z=6 und t=2 sowie x=6, y=4, z=3 und t=4.

Alternative Lösung:

Aus den drei Gleichungen folgt wie oben notiert:

$$x \cdot y = 24 \rightarrow y = \frac{24}{x}$$

$$t \cdot x = 18 \rightarrow t = \frac{18}{x}$$

$$y \cdot z = 16 \rightarrow z = \frac{16}{y}$$

Einsetzen von y in z ergibt

$$z = \frac{16}{\frac{24}{x}} = \frac{2}{3}x$$

Einsetzen von z und t in A:

$$A = z \cdot t = \frac{2}{3}x \cdot \frac{18}{x} = \frac{36}{3} = 12$$

Der Flächeninhalt ist damit immer 12.

Verwendete Heurismen:

Systematisches Probieren (heuristische Strategie)

Tabelle (heuristisches Hilfsmittel)

Gleichungen (heuristisches Hilfsmittel)

Transformationsprinzip (heuristisches Prinzip)